

PROGRAMME DE COLLE - SEMAINE N° 21: du 24/03/2025 au 28/03/2025

Connaissances minimales attendues

Chapitre 12 - Convergences et approximations

Se reporter à un programme de colle précédent

Chapitre 13 - Estimations

Se reporter à un programme de colle précédent.

Chapitre 14 - Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles

- Ensemble $\mathbb{R}^2$;
- Distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, notation $d((x_A, y_A), (x_B, y_B))$
- Propriétés vérifiées par la distance euclidienne d sur $\mathbb{R}^2$: d est positive, symétrique, vérifie l'inégalité dite triangulaire et la propriété dite de séparation ;
- Boule ouverte de $\mathbb{R}^2$, notation $B_o(\Omega, r)$ (boule ouverte de centre Ω et r) ;
- Boule fermée de $\mathbb{R}^2$, notation $B_f(\Omega, r)$ (boule fermée de centre Ω et r) ;
- Partie ouverte (ouvert) de $\mathbb{R}^2$, partie fermée (fermé) de $\mathbb{R}^2$, partie bornée (borné) de $\mathbb{R}^2$;
- Tout produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$ ouverts / fermés / bornés est un ouvert / fermé / borné de $\mathbb{R}^2$;
- Fonction de deux variables réelles à valeurs réelles ;
- Domaine de définition d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles ;
- Fonctions partielles associées à une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles ;
- Applications coordonnées ;
- Fonction polynomiale de deux variables réelles à valeurs réelles ;
- Graphe d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles : notion de surface/nappe. Notation Γ_f pour désigner la nappe représentant f ;
- Ligne de niveau k associée à une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles f : définition, exemple, interprétations ;
- Fonction de deux variables réelles à valeurs réelles définie au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;
- Limite (finie) d'une fonction de deux variables réelles en un point de $\mathbb{R}^2$, unicité de la limite ;
- Continuité d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles en un point de $\mathbb{R}^2$;
- Continuité d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles sur une partie incluse dans son domaine de définition ;
- Continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions coordonnées ;

- Opérations usuelles sur les fonctions continues de deux variables réelles : somme, produit, inverse ;
- Continuité des fonctions polynomiales de deux variables réelles ;
- Continuité de la composée $\varphi \circ f$ avec $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I$ (fonction de deux variables réelles à valeurs réelles) continue et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs réelles) continue ;
- Dérivées partielles d'ordre 1 / premières en $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, fonctions dérivées partielles d'ordre 1 / premières. Notations $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$;
- Gradient de f en $(x, y) \in \mathcal{D}_f$. Notation $\nabla(f)(x, y)$;
- Fonction de deux variables réelles à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie de son domaine de définition ;
- Les applications coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$;
- Opérations usuelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de deux variables : somme, produit, inverse ;
- Les fonctions polynomiales de deux variables réelles à valeurs réelles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$;
- Caractère $\mathcal{C}^1$ de la composée $\varphi \circ f$ avec $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I$ (fonction de deux variables réelles à valeurs réelles) $\mathcal{C}^1$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs réelles) $\mathcal{C}^1$;
- Une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert est continue sur cet ouvert.
L'existence des dérivées partielles premières en un point $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ pour f n'implique pas, en toute généralité, la continuité de f en (x, y) ;
- Dérivées partielles d'ordre 2 / secondes en (x, y) . Notations $\partial_{1,1}^2(f)(x, y)$, $\partial_{2,2}^2(f)(x, y)$, $\partial_{1,2}^2(f)(x, y)$, $\partial_{2,1}^2(f)(x, y)$
- Fonction de deux variables réelles à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie de son domaine de définition ;
- Les applications coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$;
- Opérations usuelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de deux variables : somme, produit, inverse ;
- Les applications polynomiales de deux variables réelles à valeurs réelles sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$;
- Caractère $\mathcal{C}^2$ de la composée $\varphi \circ f$ avec $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I$ (fonction de deux variables réelles à valeurs réelles) $\mathcal{C}^2$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs réelles) $\mathcal{C}^2$;
- Théorème de Schwarz ;
- Matrice hessienne de f en (x, y) . Notation $\nabla^2(f)(x, y)$;
- **(HP)** Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$, alors la matrice $\nabla^2(f)(x, y)$ est diagonalisable pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$ (justification immédiate à l'aide du théorème spectral et du théorème de Schwarz) ;
- Une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert ;
- Extremum global d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles : minimum global, maximum global ;
- Extremum local d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles : minimum local, maximum local. Illustrations graphiques ;

- Tout extremum global est local ;
- Point critique d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles ;
- Condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un ouvert :
Si f , de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, possède un extremum local en $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{U}$, alors, nécessairement, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est un point critique de f ;
Autrement dit : pour toute fonction f de deux variables réelles à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, si f possède un extremum local (sur $\mathcal{U}$), alors c'est nécessairement en un de ses points critiques.
- Condition suffisante d'existence d'un extremum local sur un ouvert :
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant un point critique $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (éventuellement comptées avec répétition) sont non nulles et de même signe, alors f possède un extremum local en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
Si les deux valeurs propres de la matrice hessienne de f en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sont strictement positives, alors f possède un minimum local en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
Si les deux valeurs propres de la matrice hessienne de f en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sont strictement négatives, alors f possède un maximum local en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
- Condition suffisante de non existence d'un extremum local sur un ouvert :
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant un point critique $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sont non nulles et de signes opposés, alors f ne possède pas d'extremum local en $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: on dit dans ce cas que f possède un point-col ou un point-selle.

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- Les Savoir-Faire du programme précédent sont toujours valables.
- Préciser (sans preuve) la nature topologique d'une partie de $\mathbb{R}^2$: s'agit-il d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$? d'un fermé de $\mathbb{R}^2$? ni l'un ni l'autre ? s'agit d'une partie bornée de $\mathbb{R}^2$?
- Déterminer le domaine de définition d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles et représenter ce domaine de définition (en faisant apparaître les éventuelles droites/courbes remarquables « à la frontière » du domaine) ;
- Justifier qu'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition ;
- Calculer, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles ;
- Déterminer les éventuels points critiques d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles ;
- Savoir utiliser : « Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et admet un extremum local en $(a, b) \in \mathcal{U}$, alors nécessairement (a, b) est un point critique de f . » ;
- Mettre en évidence un point-selle / point-col ;
- Mettre en évidence un minimum local ou maximum local en étudiant le spectre de la matrice hessienne de f en un point critique donné ;
- Savoir mettre en évidence un maximum global ou un minimum global ;
- Savoir conjecturer sur une représentation graphique d'une nappe des extrema locaux/globaux.
- Savoir conjecturer sur une représentation graphique de lignes de niveau des extrema locaux/globaux.

Preuves exigibles

Propositions

1. **(HP ?)** Décomposition du risque quadratique en biais²+variance **[C]** ;
2. **(HP)** S_n^2 est un estimateur biaisé de la variance commune des variables $X_1, \dots, X_n$, mais asymptotiquement sans biais. Estimateur sans biais construit à l'aide de l'estimateur biaisé S_n^2 (estimateur variance corrigée) **[C]** ;
3. **(HP ?)** Condition suffisante de convergence d'un estimateur impliquant le risque quadratique (sous réserve d'existence) **[C]** ;
4. **(HP ?)** $\overline{X_n}$ est un estimateur convergent de l'espérance **[C]** ;
5. **(HP)** S_n^2 est un estimateur convergent de la variance (à noter : tous les lemmes **(HP)** dont le lemme de Slutsky sont admis, mais devront être correctement énoncés lors de la restitution) **[A]** ;
6. **(HP)** S_n est un estimateur convergent de l'écart-type (à noter : tous les lemmes **(HP)** dont le lemme de Slutsky sont admis, mais devront être correctement énoncés lors de la restitution) **[A]** ;
7. Dans le cadre du modèle statistique $\{ \mathcal{B}(p), p \in]0, 1[\}$, l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance existe, est unique, et coïncide avec l'estimateur moyenne empirique $\overline{X_n}$ **[C]** ;
8. Dans le cadre du modèle statistique $\{ \mathcal{P}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}_+^* \}$, l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance existe, est unique, et coïncide avec l'estimateur moyenne empirique $\overline{X_n}$ **[A]** ;
9. Construction d'un intervalle de confiance avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : le contexte et les grandes étapes **[Poly]** ;
10. Construction d'un intervalle de confiance asymptotique avec le Théorème Central Limite dans le cas où la variance est connue **[Poly]** ;
11. Construction d'un intervalle de confiance asymptotique avec le Théorème Central Limite dans le cas où la variance n'est pas connue (à noter : tous les lemmes **(HP)** dont le lemme de Slutsky sont admis, mais devront être correctement énoncés lors de la restitution) **[A]** ;
12. La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ est symétrique, à valeurs positives, vérifie la propriété de séparation et l'inégalité triangulaire **[A]** ;
13. Les applications coordonnées sont continues sur $\mathbb{R}^2$ **[A]** ;
14. Les applications coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ **[A]** ;
15. Les applications coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ **[A]** ;

Exemples/ exercices

1. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$ converge [TD] ;
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Alors, $(\min(X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire certaine égale à 0 [TD] ;
3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{E}(1)$. Alors, $(\max(X_1, \dots, X_n) - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la fonction de répartition est $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ (loi de Gumbel de paramètre 1) [TD] ;
4. A l'aide du Théorème Central Limite, montrer que :

$$\sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2} \quad [\text{TD}]$$

5. A l'aide du Théorème Central Limite, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2} \quad [\text{TD}]$$

6. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, avec p paramètre inconnu que l'on cherche à estimer. Alors, $\overline{X}_n$ est un estimateur convergent de p et, de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\left[\overline{X}_n - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}} ; \overline{X}_n + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}} \right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $1 - \alpha$ [C] ;

7. Modèle statistique $\{ \mathcal{U}([0, \theta]), \theta \in \mathbb{R}_+^* \}$, et estimateur $W_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

- * W_n est un estimateur biaisé de θ . Construction d'un estimateur Z_n sans biais de θ à l'aide de W_n [C] ;
- * Z_n est un estimateur convergent de θ [C] ;
- * Construction, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, d'un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance de $1 - \alpha$ à l'aide de Z_n et de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev [C].
- * W_n coïncide avec l'estimateur du maximum de vraisemblance [TD].

8. Dans le cadre du modèle statistique $\{ \mathcal{G}(p), p \in]0, 1[\}$, l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance existe, est unique, et coïncide avec l'inverse $\frac{1}{\overline{X}_n}$ de l'estimateur moyenne empirique $\overline{X}_n$ [TD] ;

9. Toute boule ouverte est une partie ouverte et bornée de $\mathbb{R}^2$ [Ac] ;

10. La fonction de deux variables réelles à valeurs réelles f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2$$

possède un minimum global de valeur 0 atteint en (0,0) et uniquement en ce point, et ne possède pas de maximum global [Ac] ;

11. Détermination et représentation graphique des lignes de niveau associées à la fonction de deux variables f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2 \quad [\text{C}]$$

12. Soit f la fonction de deux variables réelles à valeurs réelles définies par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

- * $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ [C] ;
- * f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ [C] ;
- * calcul des dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ [C] ;
- * détermination des points critiques de f [C] ;
- * étude des extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$ [C].

13. Soit f la fonction de deux variables réelles à valeurs réelles définies par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x, y) = x(\ln(x)^2 + y^2)$$

- * $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ [C] ;
- * f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ [C] ;
- * calcul des dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ [C] ;
- * détermination des points critiques de f [C] ;
- * étude des extrema locaux de f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ [C].

[A] : Annexe **Preuves** ;

[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;

[Poly] : Preuve traitée dans le polycopié ;

[Ac] : Annexe **Corrections** ;

[TD] : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels) et TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri (**HP**) (tri-bulles et tri-par-insertion)].
- **TP3 - Calculs numériques** [algorithme de dichotomie, méthode de point fixe, méthode de Newton-Raphson (**HP**), méthode des rectangles permettant le calcul approché d'une intégrale sur un segment(**HP**), application au calcul des valeurs approchées des valeurs prises par la fonction de répartition de toute variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (**HP**)].
- **TP4 - Graphes (rappels)** [révision du vocabulaire et des théorèmes du programme, représentation d'un graphe avec Python (matrice numpy d'adjacence, liste des listes d'adjacence, dictionnaire), fonctions de conversion d'une représentation à une autre, divers exercices de manipulation de graphes (ordre, nombre d'arêtes, caractère adjacent de deux sommets, voisinage, degré, caractère isolé d'un sommet, caractère simple, complet, eulérien d'un graphe, calcul du nombre de chaînes reliant deux sommets donnés, calcul des distances combinatoires à un sommet dans un graphe simple, calcul de l'excentricité, du diamètre d'un graphe, algorithme de Dijkstra (calcul d'une chaîne de poids minimal)].
- **TP5 - Simulation d'expériences aléatoires - le cas discret (rappels et compléments)** [diagramme en bâtons (**bar**), la fonction **unique** ((**HP**), à savoir donc implémenter à la main), matrices de booléens (pour compter le nombre de coefficients d'un tableau **numpy** vérifiant une contrainte donnée), les fonctions **random**, **randint**, **binomial**, **geometric**, **poisson** de la sous-bibliothèque **random** de la bibliothèque **numpy**, méthode de Monte-Carlo (estimation d'une espérance (moments, espérance de transformées), d'une probabilité, ...), divers exercices (tirages avec remise, sans remise, selon un protocole plus « exotique », marches aléatoires, graphes aléatoires d'Erdős-Renyi (estimation du nombre d'arêtes, du nombre de sommets isolés, de la probabilité qu'il soit connexe, etc))]
- **TP6 - Bases de données et langage SQL** [entité, table, base de données, attribut, descripteur, domaine, type, enregistrement, champ, schéma de table, schéma relationnel d'une base de données, clé primaire, clé étrangère, requête SQL de création de table (**CREATE TABLE ...**) (avec éventuellement déclaration des clés primaires et étrangères (**PRIMARY KEY(...)**, **FOREIGN KEY(...)** **REFERENCES ...**), insertion des données dans une table (**INSERT INTO ... VALUES**), suppression des données dans une table (**DELETE FROM ...**, **DELETE FROM ... WHERE**), suppression d'une table (**DROP TABLE ...**) (**HP**), modification des données d'une table (**UPDATE ... SET ... WHERE ...**), projection sans contrainte (**SELECT ... FROM ...**), projection sans doublon (**SELECT DISTINCT ... FROM ...**), projection avec données triées dans l'ordre croissant/décroissant (**SELECT ... FROM ... ORDER BY ... ASC/DESC**), projection avec données tronquées (**SELECT ... FROM ... LIMIT ... OFFSET ...**), projection avec renommage (**AS**), restriction (projection avec contrainte) (**SELECT ... FROM ... WHERE ...**), produit cartésien de deux tables, jointure de deux tables (**SELECT ... FROM ... INNER JOIN ... ON ... =**), opérateurs ensemblistes (**UNION**, **INTERSECT**, **EXCEPT**), fonction d'agrégation (**COUNT(...)**, **SUM(...)**, **AVG(...)**, **MIN(...)** et **MAX(...)**), utilisation des fonctions d'agrégation sur des « groupes » (**GROUP BY HAVING ...**) ((**HP**))]
- **TP7 - Chaînes de Markov** [simulation d'une trajectoire et représentations graphiques, calcul « exact » de la loi de X_n à l'aide des puissances de la matrice de transition (en utilisant les fonctions

`np.dot` et `al.matrix_power`), estimation de la loi de X_n à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, mise en évidence de la convergence (sous réserve d'existence) de la chaîne de Markov, mise en évidence d'une loi stationnaire (ou bien grâce à la « loi limite » mise en évidence au niveau du point précédent, ou bien en donnant un vecteur propre de tM associé à la valeur propre 1, à coefficients positifs et dont la somme vaut 1 (utilisation des fonctions `al.eig` et `np.sum`)), simulation du premier l'instant où la chaîne de Markov est passée pour la kème fois par l'état initial, simulation du premier instant où la chaîne de Markov est passée au moins une fois par tous ses états, étude approfondie des exemples suivants : lanciers de deux pièces suivant un protocole particulier, un modèle épidémiologique, un modèle simplifié de « bonus-malus » utilisé par les assurances automobiles, l'algorithme de *PageRank* de Google]

- **(Annexe Python - Chapitre 11)** [Utilisation de la fonction `odeint` de la sous-bibliothèque `integrate` de la bibliothèque `scipy` pour représenter des trajectoires d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 et d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2]
- **TP8 - Simulations de variables aléatoires à densité** [histogramme non normalisé, histogramme normalisé (définitions formelles), la fonction `plt.hist` : utilisation « basique » et quelques options, lien (justifié) entre l'enveloppe d'un histogramme normalisé et une densité de probabilité, fonction de répartition empirique : définition, résultats de convergence (dont le théorème de Glivenko-Cantelli **(HP)**), simulation de réalisations à l'aide de Python, simulation d'échantillons de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi à densité usuelle : fonction `random`, `uniform` **(HP)**, `exponential` et `normal` de la sous-bibliothèque `random` de la bibliothèque `numpy`, applications à des conjectures de lois, méthode d'inversion de simulation d'une variable aléatoire à densité : principe et résultat fondamental ($F_X(X)$ suit la loi $\mathcal{U}([0, 1])$) et applications à la simulation des lois exponentielle, de Rayleigh **(HP)**, de Gumbel **(HP)** et de Pareto **(HP)**, méthode de Monte-Carlo d'estimation d'une intégrale : principe et exemples, illustrations du Théorème Central Limite]
- **TP9 - Estimations** [simulation et mise en évidence de la convergence des estimateurs usuels ($\overline{X_n}$, S_n^2 , S_n), comparaison de deux estimateurs du même paramètre (exemple du modèle statistique $\{ \mathcal{U}([0, \theta]), \theta \in \mathbb{R}_+^* \}$ et des deux estimateurs $V_n = 2\overline{X_n}$ et $Z_n = \frac{n+1}{n} \max(X_1, \dots, X_n)$), simulation (exemple du modèle statistique $\{ \mathcal{B}(p), p \in [0, 1] \}$) des intervalles de confiance naturellement induit par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, par le Théorème Central Limite, comparaison de la qualité des intervalles de confiance]

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme **(HP)**).

On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- On évitera autant que possible de consacrer plus d'une demi-heure aux questions de cours ;
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- Peu d'exercices/exemples relatifs aux fonctions de deux variables réelles ont été abordés en cours ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.